Opakování z Lieových algeber

G poloprostá Lieova grupa $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ poloprostá Lieova algebra

$\mathfrak{g}$ poloprostá $\Rightarrow$

ad věrná repr. $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$

k nedegenerovaná metrika na $\mathfrak{g}$

$\mathrm{Der}\,\mathfrak{g} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$

$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \to$ algebra operátorů tvaru ad_m $m \in \mathfrak{g}$

$\mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \to$ algebra operátorů δ splňujících

$$\delta[m,n] = [\delta m, n] + [m, \delta n]$$

Vždy platí $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \subset \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ ($\Leftarrow$ Jacobiho identita)

pro poloprostou $\mathfrak{g}$ $\delta \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \Rightarrow \exists m \in \mathfrak{g}$ $\delta = \mathrm{ad}_m$

T reprezentace grupy G na vekt. prostoru A tj. $h \in G \to T_h \in A^1_1$

t odpovídající repr. alg. $\mathfrak{g}$ na vekt. prostoru A tj. $m \in \mathfrak{g} \to t_m \in A^1_1$

$\mathfrak{g}$ poloprostá, A konečně dimenzionální $\Rightarrow$

t je plně reducibilní reprezentace, tj.

$$A = \bigoplus_{z=0}^{k} A_z \qquad P_z \text{ projektor na } A_z$$

$$t = \bigoplus_{z=0}^{k} t_z \qquad t_z = P_z \cdot t \cdot P_z \text{ zúžení } t \text{ na } A_z$$

kde $t_0 = 0$ triviální

$z > 0$ t_z ireducibilní

Schurovo lemma

$$\forall m \in \mathfrak{g}\ [S, t_m] = 0 \Rightarrow S = S_0 + \sum_{z=1}^{k} s_z P_z \qquad S_z = P_z S P_z$$

tj. na každé ireducib. komponentě A_z je S úměrné jednotce P_z na A_z

na A_0 je S neurčené

Vše lze přímočaře zmodifikovat pro reduktovatelnou alg. $\mathfrak{g}$

tj. pro algebru splňující

$$A = Z \oplus S \qquad Z \text{ centrum } A \qquad S \text{ poloprostá}$$

Lokální kalibrační grupa a algebra

Def: Lokální kalibrační grupa a algebra

Nechť G je Lieova grupa a g její Lieova algebra

nechť M je podkladová varieta

GM je grupový bundle ~~ze~~ se standardní fibrou G
s grupovou strukturou indukovanou z G

gM je vektorový bundl se standardní fibrou g
se strukturou Lieovy algebry indukovanou z g
realizovaný jako $g_x M = T_e G_x M$ (tečný pr. $G_x M$ v e)
tj. máme Lieovy záv. a strukturní tenzor

$$[m, n]^\alpha = m^\mu n^\nu c_{\mu\nu}{}^\alpha \qquad m, n \in gM \quad c \in g^1_{[2]} M$$

a Killingovu metriku

$$k_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} c_{\alpha\mu}{}^\nu c_{\beta\nu}{}^\mu$$

Lokální kalibrační grupa je prostor řezů GM

$\text{Sect}\, GM$ tj. $h(x) \in G_x M \quad \forall x \in M$

Lokální kalibrační algebra je prostor řezů gM

$\text{Sect}\, gM$ tj. $m^\alpha(x) \in g_x M \quad \forall x \in M$

Věta

nechť G je poloprostá Lieova gr., g její Lieova algebra
a GM, gM příslušné fibrované bundly nad M

$\Downarrow$

adjoint reprezentace Ad je věrná ultralokální
reprezentace GM na gM

$$Ad_h : gM \to gM \qquad \text{tj. } Ad_h \in \text{Sect}\, g^1_1 M \text{ pro } h \in \text{Sect}\, GM$$

$$Ad_{h_1 h_2} = Ad_{h_1} Ad_{h_2} \qquad Ad_{h^{-1}} = Ad_h^{-1}$$

strukturní tenzor je invariantní vůči Ad_h tj.

$$Ad_h [m, n] = [Ad_h m, Ad_h n] \Leftrightarrow Ad_h c = c$$

Věta

nechť G je polojednoduchá Lieova gr., g její Lieova algebra a GM, gM příslušné fibrované bundly nad M

⇓ adjoint reprezentace ad je věrná ultralokální reprezentace gM na gM

$$ad_m : gM \to gM \quad \text{tj } ad_m \in \text{Sect}\, g^1_1 M \quad \text{pro } m \in \text{Sect}\, gM$$

kde

$$ad_m{}^\kappa{}_\alpha = m^\varepsilon c_{\varepsilon\alpha}{}^\kappa \quad \text{tj} \quad ad_m n = [m, n]$$

a platí

$$ad_m [n_1, n_2] = [ad_m n_1, n_2] + [n_1, ad_m n_2]$$

(plyne z Jacobiho identity, ekvivalentní $ad_m c = 0$)

z polojednoduchosti plyne, že každé lineární ultralokální operace δ splňující Leibniz. pravidlo

$$\delta [n_1, n_2] = [\delta n_1, n_2] + [n_1, \delta n_2]$$

musí být tvaru

$$\delta = ad_m \qquad \text{pro nějaké } m \in \text{Sect}\, gM$$

Def: Trivializace kompatibilní s kalibrační algebrou

nechť GM a gM jsou bundly kalibrační grupy a algebry

Trivializace gM kompatibilní s kalibrační algebrou je volba báze l_α v gM tak, že

$$c_{\alpha\beta}{}^\gamma = \text{konst} \quad (\text{na } M)$$

kde $c_{\alpha\beta}{}^\gamma$ jsou komponenty strukt. tenzoru v této bázi

$$[l_\alpha, l_\beta] = c_{\alpha\beta}{}^\gamma l_\gamma$$

Zřejmě též platí

$$k_{\alpha\beta} = \text{konst.}$$

Pozn:

konstantnost $c_{\alpha\beta}{}^\gamma$ je míněna na podkladové varietě M a lze samozřejmě též levoinvariantně rozšířit na $G_x M$ a pak budou komponenty strukt. tenz. konstantní i na $G_x M$

Kovariantní derivace na kalibrační algebře

Def: kov. der. konzistentní se strukturou kalibr. algebry
nechť gM je vektorový bundl kalibrační algebry
kovariantní der. D je konzistentní se strukt. kalibr. algebry pokud

$$Dc = 0$$

což je ekvivalentní podmínce

$$D[m,n] = [Dm,n] + [m,Dn]$$

(s užitím $[m,n]^\alpha = m^\mu n^\nu c_{\mu\nu}{}^\alpha$)

Lemma

D je konzistentní se strukt. kalibr. algebry
$\Downarrow$
$$Dk = 0$$

Důk: plyne z $k_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} c_{\alpha\mu}{}^\nu c_{\beta\nu}{}^\mu$ a $D_{\underline{m}} c_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$

Lemma

l_α je trivializace na kalibr. algebře gM a
∂ je příslušná souř. derivace $\partial l_\alpha = 0$
$\Downarrow$
∂ je konzistentní se strukt. kalibr. algebry

$$\partial_{\underline{m}} c_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0 \qquad \partial_{\underline{m}} k_{\alpha\beta} = 0$$

Důk:

plyne z $c_{\alpha\beta}{}^\gamma = c_{\mu\nu}{}^\rho\, l^\mu_\alpha\, l^\nu_\beta\, l^\gamma_\rho$ a

$\partial_{\underline{m}} l^\alpha_\rho = 0 \quad \partial_{\underline{m}} l^\rho_\alpha = 0 \quad c_{\mu\nu}{}^\rho = \text{konst.}$ kde l^μ_α je duální k l^α_μ

Věta Rozdíl kov. der. na $\mathfrak{g}M$

nechť D, $\tilde{D}$ jsou kov. derivace konzist. s kal. algebrou

$\Downarrow$

rozdílový tenzor $A_{\underline{m}}{}^{\kappa}{}_{\lambda}$ generující pseudoderivaci

$$\mathbb{A}_{\underline{m}} = D_{\underline{m}} - \tilde{D}_{\underline{m}}$$

splňuje

$$A_{\underline{a}} \cdot [m, n] = [A_{\underline{a}} \cdot m, n] + [m, A_{\underline{a}} . n]$$

(kde vynecháváme indexy na $\mathfrak{g}M$)

pro poloprostou algebru $\mathfrak{g}$ existuje $\mathcal{R}_{\underline{a}}^{\kappa} \in \mathrm{Sect}\, \mathfrak{g} \otimes T^*M$ tak

$$A_{\underline{a}}{}^{\kappa}{}_{\lambda} = \mathrm{ad}_{\mathcal{R}_{\underline{a}}}{}^{\kappa}{}_{\lambda} = \mathcal{R}_{\underline{a}}^{\kappa}\, c_{\kappa\lambda}{}^{\kappa}$$

Důk:

D i $\tilde{D}$ splňují Leibniz. pravidlo, tj. i $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A}_{\underline{a}} [m, n] = [\mathbb{A}_{\underline{a}} m, n] + [m, \mathbb{A} m]$$

akce pseudoderivace $\mathbb{A}_{\underline{a}}$ na $\mathfrak{g}M$ je pomocí $A_{\underline{a}}$ $\quad \mathbb{A}_{\underline{a}} m = A_{\underline{a}} \cdot m$

pro poloprostou alg. máme $\mathrm{Der}\, \mathfrak{g} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$

Věta

nechť ∂ je souř. derivace trivializace kalibr. algebry a

$A_{\underline{a}}{}^{\kappa}{}_{\lambda}$ je nekt. potenciál vygenerovaný z $\mathcal{R}_{\underline{a}}^{\kappa} \in \mathrm{Sect}\, \mathfrak{g} \otimes T^*M$

$$A_{\underline{a}}{}^{\kappa}{}_{\lambda} = \mathcal{R}_{\underline{a}}^{\kappa}\, c_{\kappa\lambda}{}^{\kappa} \qquad \text{tj.} \quad A = \mathrm{ad}_{\mathcal{R}}$$

pak kov. derivace

$$D = \partial + \mathbb{A}$$

je konzistentní se strukturou kalibr. algebry

Důk:

∂ i $\mathbb{A}$ splňují Leibniz. pravidlo, tedy i D

Akce D na gM lze pak psát

$B^k \in$ Sect gM

$$D_a B^k = \partial_a B^k + [\mathcal{A}_a, B]^k \longleftarrow \text{Lieova závorka}$$

$B^\kappa{}_\nu \in$ Sect $g^1_1 M$ $\qquad B^\kappa{}_\nu = B^k c_{k\nu}{}^\kappa \qquad$ tj. $B = ad_B$

$$D_a B^\kappa{}_\nu = \partial_a B^\kappa{}_\nu + \underbrace{[A_a, B]^\kappa{}_\nu}_{\text{komutátor}} = (\partial_a B^k + \underbrace{[\mathcal{A}_a, B]^k}_{\text{Lieova závorka}}) c_{k\nu}{}^\kappa$$

Věta: Tenzor křivosti na kalibrační algebře

D_a kov. der. konzistentní s kalibr. algebrou

$F_{ab}{}^\kappa{}_\nu$ tenzor křivosti D_a

platí

$\mathbb{F}_{ab}\, c = 0 \qquad$ tj. $\qquad F_{ab}\cdot[m,n] = [F_{ab}\cdot m, n] + [m, F_{ab}\cdot n]$

pro poloprostou algebru g existuje $\mathcal{F}_{ab}{}^k$ takové, že

$F_{ab}{}^\kappa{}_\nu = \mathcal{F}_{ab}{}^k c_{k\nu}{}^\kappa \qquad$ tj. $\qquad F = ad_{\mathcal{F}}$

Důk.

$Dc = 0 \Rightarrow DDc = 0 \Rightarrow \mathbb{F}c = 0 \Rightarrow F_{ab}{}^k{}_\lambda c_{\mu\nu}{}^\lambda - F_{ab}{}^\lambda{}_\mu c_{\lambda\nu}{}^k - F_{ab}{}^\lambda{}_\nu c_{\mu\lambda}{}^k = 0$

$\Rightarrow F\cdot[m,n] = [F\cdot m, n] + [m, F\cdot n]$ díky $[m,n]^k = m^\mu n^\nu c_{\mu\nu}{}^k$

Příklady akce operátoru křivosti:

$\mathbb{F}_{ab} B^k = F_{ab}{}^k{}_\lambda B^\lambda = [\mathcal{F}_{ab}, B]^k \qquad\qquad B^\kappa{}_\nu = B^k c_{k\nu}{}^\kappa$

$\mathbb{F}_{ab} B^\kappa{}_\nu = [F_{ab}, B]^\kappa{}_\nu = [\mathcal{F}, B]^k c_{k\nu}{}^\kappa$

Věta:

D kov. der. na $\mathfrak{g}M$ daná potenciálem $A = \mathrm{ad}_{\Xi}$ vůči trivializaci ∂ a $F = \mathrm{ad}_{\mathfrak{F}}$ je tenzor křivosti D vše konzistentní se strukt. kalibrační algebry

$\Downarrow$

$$F_{ab}{}^{\kappa}{}_{\nu} = \partial_a A_b{}^{\kappa}{}_{\nu} + [A_a, A_b]^{\kappa}{}_{\nu} = \partial_a \wedge A_b{}^{\kappa}{}_{\nu} + [A_a, A_b]^{\kappa}{}_{\nu}$$

$$\mathfrak{F}_{ab}{}^{\kappa} = \partial_a \Xi_b{}^{\kappa} + [\Xi_a, \Xi_b]^{\kappa} = \partial_a \wedge \Xi_b{}^{\kappa} + [\Xi_a, \Xi_b]^{\kappa}$$

kde v druhých výrazech jsme rozšířili ∂ na T^*M pomocí derivace bez torze (např. Levi-Civit. der. ∇)

Důk:

první řádek je obecné formule pro tenzor křivosti na vekt. bundlu

druhý řádek plyne z

$$F_{ab}{}^{\kappa}{}_{\nu} = \mathfrak{F}_{ab}{}^{\lambda} c_{\lambda\nu}{}^{\kappa} \qquad A_a{}^{\kappa}{}_{\nu} = \Xi_a{}^{\lambda} c_{\lambda\nu}{}^{\kappa}$$

$\partial_a c_{\mu\nu}{}^{\kappa} = 0$ a Jacobiho identita $\Rightarrow [\mathrm{ad}_{\Xi}, \mathrm{ad}_{\Xi}] = \mathrm{ad}_{[\Xi,\Xi]}$